Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 1

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = 3\cos 2x - 5x$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = \operatorname{ch} x(\dot{x}^2 - 1)$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. Бусинка, имеющая заряд q и массу m, может скользить без трения вдоль горизонтальной спицы. На расстоянии a от этой спицы над ней находится стационарный заряд $-3q$. Найдите период малых колебаний бусинки.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = 2t + 4t^2 + 5t^5$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, \quad t < 0, \\ F_0 t^2/\tau^2, \quad 0 < t < \tau, \\ F_0, \quad t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = F_0 \sin(\pi t_1/2\tau)$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = 2\mathrm{e}^x - x + \varepsilon(t^2 - 3t^3)x$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого "вязкого" трения на "сухое" (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $2m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 + \varphi^2 - \varphi^3 + \varphi^4/4$, $-\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $5/4$. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(\operatorname{th}(t/\tau) - 1)/2$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 2

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = x^2 + 2x + 2/(x+1)$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = (x+2)\dot{x}^2/2 - x\mathrm{e}^x$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. К источнику постоянного напряжения U_0 подключены последовательно котушка и параллельно соединенные конденсаторы емкостью $2C$ и $3C$. Найдите частоту колебаний заряда на первом конденсаторе.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = 3t + 2\sin 2t$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, \quad t < 0, \\ F_0 \sin(\pi t/2\tau), \quad 0 < t < \tau, \\ F_0, \quad t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = F_0 t_1^2/\tau^2$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = 3x\varepsilon \sin 2t + 2\cos x + 3x$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого “вязкого” трения на “сухое” (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $3m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 - \varphi^2/2 + \varphi^4/4$, $-\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна 1. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(1 - \mathrm{th}^2(t/\tau))/2$, $t < 0$ и $F(t) = F_0(\mathrm{th}^2(t/\tau) + 1)/2$, $t > 0$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 3

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = x + 3/(x+2)^4$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = (x-1)^2\dot{x}^2 - x^2/(x^2+4)$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. Бусинка, имеющая заряд q и массу m, может скользить без трения вдоль проволочного кольца радиусом R, плоскость которого вертикальна. В нижней точке кольца находится стационарный заряд $2q$. Найдите период малых колебаний бусинки.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = 3\mathrm{e}^{-2t} + 2\cos t$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, \quad t < 0, \\ F_0(\mathrm{e}^{t/\tau} - 1), \quad 0 < t < \tau, \\ F_0, \quad t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = F_0 t_1^3/\tau^3$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = x^4 - 3x^2 + \varepsilon x \mathrm{e}^t$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого "вязкого" трения на "сухое" (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $4m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 + \varphi^2 - \varphi^3 + \varphi^4/4$, $-\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна 1. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(\mathrm{th}(t/\tau) - 1)/2$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 4

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = \mathrm{e}^{2x} - x$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = \mathrm{e}^{-2x}\dot{x}^2 - \mathrm{e}^{2x^2+4x+5}$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. К источнику постоянного напряжения U_0 подключены последовательно котушка и конденсаторы емкостью $2C$ и $3C$. Найдите частоту колебаний заряда на первом конденсаторе.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = 2\mathrm{e}^{-3t}\cos t$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ F_0 t^3/\tau^3, & 0 < t < \tau, \\ F_0, & t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = F_0\sin(5\pi t_1/2\tau)$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = -x + 3\mathrm{e}^{x} + \varepsilon(t^2 + t^3)x$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого “вязкого” трения на “сухое” (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $5m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 - \varphi^2/2 + \varphi^4/4,\ -\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $3/4$. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(1 - \mathrm{th}^2(t/\tau))/2,\ t < 0$ и $F(t) = F_0(\mathrm{th}^2(t/\tau) + 1)/2,\ t > 0$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 5

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = 4\cos 2x - 3x$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = \dot{x}^2/(12+4x) - x\sqrt{12+4x}$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. Бусинка, имеющая заряд q и массу m, может скользить без трения вдоль горизонтальной спицы. На расстоянии a от этой спицы над ней находится стационарный заряд $-4q$. Найдите период малых колебаний бусинки.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = -\cos 2t - t\sin t$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, \quad t < 0, \\ F_0 \sin(5\pi t/2\tau), \quad 0 < t < \tau, \\ F_0, \quad t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = 2F_0 t_1^2/\tau^2$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = 3x\varepsilon\cos 2t + 2\cos 3x + x$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого "вязкого" трения на "сухое" (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $6m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 + \varphi^2 - \varphi^3 + \varphi^4/4$, $-\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $5/4$. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(\mathrm{th}(t/\tau) - 1)/2$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 6

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = x^2 + 4x + 2/(x+2)$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = 2\mathrm{e}^{-x^2-5}\dot{x}^2 - (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2\cos x)$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. К источнику постоянного напряжения U_0 подключены последовательно котушка и параллельно соединенные конденсаторы емкостью C и $4C$. Найдите частоту колебаний заряда на первом конденсаторе.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = 2t - 2t^3 + 5t^5$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, \quad t < 0, \\ F_0(\mathrm{e}^{2t/\tau} - 1), \quad 0 < t < \tau, \\ F_0, \quad t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = F_0 t_1^4/\tau^4$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = x^3 - 3x^2 + 2x + \varepsilon x \mathrm{e}^{-2t}$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого “вязкого” трения на “сухое” (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $7m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 - \varphi^2/2 + \varphi^4/4$, $-\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна 1. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(1 - \mathrm{th}^2(t/\tau))/2,\ t < 0$ и $F(t) = F_0(\mathrm{th}^2(t/\tau) + 1)/2,\ t > 0$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 7

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = 2x + 3/(x-2)^4$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = \operatorname{ch} x(\dot{x}^2 - 3)$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. Бусинка, имеющая заряд q и массу m, может скользить без трения вдоль проволочного кольца радиусом R, плоскость которого вертикальна. В верхней точке кольца находится стационарный заряд $3q$. Найдите период малых колебаний бусинки.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = -3t + 2\cos 4t$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, \quad t < 0, \\ F_0 t^4/\tau^4, \quad 0 < t < \tau, \\ F_0, \quad t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = F_0 \sin(9\pi t_1/2\tau)$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = 3\mathrm{e}^{2x} - x + \varepsilon(2t^2 - 3t^4)x$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого “вязкого” трения на “сухое” (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $8m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 + \varphi^2 - \varphi^3 + \varphi^4/4$, $-\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна 1. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(\operatorname{th}(t/\tau) - 1)/2$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 8

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = \mathrm{e}^{3x} - 2x$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = (x+1)\dot{x}^2/2 - 3x\mathrm{e}^x$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. К источнику постоянного напряжения U_0 подключены последовательно котушка и конденсаторы емкостью $4C$ и C. Найдите частоту колебаний заряда на первом конденсаторе.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = 3\mathrm{e}^{-t} + 4\cos t$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ F_0 \sin(9\pi t/2\tau), & 0 < t < \tau, \\ F_0, & t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = F_0 t_1^5/\tau^5$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = 2x\varepsilon \sin 4t + 2\cos 4x + 2x$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого “вязкого” трения на “сухое” (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $9m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 - \varphi^2/2 + \varphi^4/4$, $-\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $3/4$. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(1 - \mathrm{th}^2(t/\tau))/2$, $t < 0$ и $F(t) = F_0(\mathrm{th}^2(t/\tau) + 1)/2$, $t > 0$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 9

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = 3\cos 2x - 2x$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = (x-1)^2\dot{x}^2 - 2x^2/(x^2+1)$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. Бусинка, имеющая заряд q и массу m, может скользить без трения вдоль горизонтальной спицы. На расстоянии a от этой спицы над ней находится стационарный заряд $-6q$. Найдите период малых колебаний бусинки.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = 2\mathrm{e}^{-2t}\cos t$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, \quad t < 0, \\ F_0(\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1), \quad 0 < t < \tau, \\ F_0, \quad t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = 2F_0 t_1^4/\tau^4$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = x^5 - 3x^2 + \varepsilon x \mathrm{e}^{-3t}$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого “вязкого” трения на “сухое” (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $10m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 + \varphi^2 - \varphi^3 + \varphi^4/4$, $-\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $5/4$. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(\mathrm{th}(t/\tau) - 1)/2$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 10

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = x^2 - 2x + 3/(x-1)$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = \mathrm{e}^{-x}\dot{x}^2 - 2\mathrm{e}^{x^2+2x+5}$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. К источнику постоянного напряжения U_0 подключены последовательно котушка и параллельно соединенные конденсаторы емкостью $4C$ и C. Найдите частоту колебаний заряда на первом конденсаторе.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = -\cos 4t - t^2 \sin t$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, \quad t < 0, \\ F_0 t^5/\tau^5, \quad 0 < t < \tau, \\ F_0, \quad t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = F_0 \sin(\pi t_1/2\tau)$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = \mathrm{e}^{2x} - 2x + \varepsilon(t^3 + 5t^3)x$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого “вязкого” трения на “сухое” (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $11m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 - \varphi^2/2 + \varphi^4/4$, $-\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна 1. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(1 - \mathrm{th}^2(t/\tau))/2,\ t < 0$ и $F(t) = F_0(\mathrm{th}^2(t/\tau) + 1)/2,\ t > 0$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 11

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = 4x + 3/(x+2)^5$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = \dot{x}^2/(3+4x) - x\sqrt{6+8x}$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. Бусинка, имеющая заряд q и массу m, может скользить без трения вдоль проволочного кольца радиусом R, плоскость которого вертикальна. В нижней точке кольца находится стационарный заряд $4q$. Найдите период малых колебаний бусинки.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = t^3 - 4t^4 - t^7$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, \quad t < 0, \\ F_0 \sin(5\pi t/2\tau), \quad 0 < t < \tau, \\ F_0, \quad t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = 4F_0 t_1^3/\tau^3$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = 2x\varepsilon \sin 2t + 2\sin x + 3x$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого "вязкого" трения на "сухое" (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $2m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 + \varphi^2 - \varphi^3 + \varphi^4/4$, $-\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна 1. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(\mathrm{th}(t/\tau) - 1)/2$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 12

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = \mathrm{e}^x - 4x$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = 4\mathrm{e}^{-x^2-2}\dot{x}^2 - (\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} - 2\cos 2x)$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. К источнику постоянного напряжения U_0 подключены последовательно котушка и конденсаторы емкостью $2C$ и $C/2$. Найдите частоту колебаний заряда на первом конденсаторе.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = 4t^2 - \sin 2t$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ F_0(\mathrm{e}^{-2t/\tau} - 1), & 0 < t < \tau, \\ F_0, & t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = 5F_0 t_1^2/\tau^2$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = x^5 - 3x^3 + \varepsilon x \mathrm{e}^{-4t}$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого "вязкого" трения на "сухое" (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $3m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 - \varphi^2/2 + \varphi^4/4$, $-\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $3/4$. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(1 - \mathrm{th}^2(t/\tau))/2$, $t < 0$ и $F(t) = F_0(\mathrm{th}^2(t/\tau) + 1)/2$, $t > 0$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 13

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = 3\cos 3x - 3x$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = 4\,\mathrm{ch}\,x(2\dot{x}^2 - 1)$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. Бусинка, имеющая заряд q и массу m, может скользить без трения вдоль горизонтальной спицы. На расстоянии a от этой спицы над ней находится стационарный заряд $-7q$. Найдите период малых колебаний бусинки.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = 3\mathrm{e}^{-t} - 3\sin t$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, \quad t < 0, \\ F_0 t^2/\tau^2, \quad 0 < t < \tau, \\ F_0, \quad t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = F_0 \sin(5\pi t_1/2\tau)$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = -2x + 2\mathrm{e}^{2x} + \varepsilon(2t^5 - t^3)x$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого “вязкого” трения на “сухое” (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $4m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 + \varphi^2 - \varphi^3 + \varphi^4/4$, $-\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $5/4$. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(\mathrm{th}(t/\tau) - 1)/2$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 14

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = x^2 - 6x + 1/(x-3)$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = (x+3)\dot{x}^2 - x\mathrm{e}^x$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. К источнику постоянного напряжения U_0 подключены последовательно котушка и параллельно соединенные конденсаторы емкостью $2C$ и $C/2$. Найдите частоту колебаний заряда на первом конденсаторе.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = 2\mathrm{e}^{-2t}\sin t$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, \quad t < 0, \\ F_0 \sin(\pi t/2\tau), \quad 0 < t < \tau, \\ F_0, \quad t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = F_0 t_1^6/\tau^6$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = 4x\varepsilon \sin 5t + 2\cos x + x$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого "вязкого" трения на "сухое" (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau \; \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $5m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 - \varphi^2/2 + \varphi^4/4$, $-\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна 1. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(1 - \mathrm{th}^2(t/\tau))/2$, $t < 0$ и $F(t) = F_0(\mathrm{th}^2(t/\tau) + 1)/2$, $t > 0$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 15

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = x + 2/(x-1)^6$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = 2(x+1)^2\dot{x}^2 - 3x^2/(x^2+1)$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. Бусинка, имеющая заряд q и массу m, может скользить без трения вдоль проволочного кольца радиусом R, плоскость которого вертикальна. В верхней точке кольца находится стационарный заряд $5q$. Найдите период малых колебаний бусинки.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = \sin 2t - 4t\sin t$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, \quad t < 0, \\ F_0(\mathrm{e}^{-3t/\tau} - 1), \quad 0 < t < \tau, \\ F_0, \quad t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = 4F_0 t_1^2/\tau^2$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = x^3 - 3x^2 + 4x + \varepsilon x \mathrm{e}^{-3t}$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого "вязкого" трения на "сухое" (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $6m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 + \varphi^2 - \varphi^3 + \varphi^4/4$, $-\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна 1. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(\mathrm{th}(t/\tau) - 1)/2$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 16

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = \mathrm{e}^{6x} - 2x$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = \mathrm{e}^{x}\dot{x}^2 - \mathrm{e}^{2x^2-x+6}$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. К источнику постоянного напряжения U_0 подключены последовательно котушка и конденсаторы емкостью C и $5C$. Найдите частоту колебаний заряда на первом конденсаторе.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = -2t^4 + 4t^2 + 5t$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, \quad t < 0, \\ F_0 t^3/\tau^3, \quad 0 < t < \tau, \\ F_0, \quad t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = F_0 \sin(9\pi t_1/2\tau)$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = 2\mathrm{e}^{x} - x + \varepsilon(t^2 - 3t^3)x$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого "вязкого" трения на "сухое" (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $7m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 - \varphi^2/2 + \varphi^4/4, \ -\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $3/4$. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(1 - \mathrm{th}^2(t/\tau))/2, \ t < 0$ и $F(t) = F_0(\mathrm{th}^2(t/\tau) + 1)/2, \ t > 0$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 17

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = 3\cos x - x$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = 3\dot{x}^2/(1+x) - 5x\sqrt{1+x}$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. Бусинка, имеющая заряд q и массу m, может скользить без трения вдоль горизонтальной спицы. На расстоянии a от этой спицы над ней находится стационарный заряд $-2q$. Найдите период малых колебаний бусинки.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = -3t - \sin 3t$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, \quad t < 0, \\ F_0 \sin(9\pi t/2\tau), \quad 0 < t < \tau, \\ F_0, \quad t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = 2F_0 t_1^4/\tau^4$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = 5x\varepsilon \sin 3t + 4\cos x + x$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого “вязкого” трения на “сухое” (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $6m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 + \varphi^2 - \varphi^3 + \varphi^4/4$, $-\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна 5/4. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(\mathrm{th}(t/\tau) - 1)/2$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 18

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = x^2 - 2x + 4/(x-1)$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = \mathrm{e}^{4-x^2}\dot{x}^2 - 2(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2\cos x)$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. К источнику постоянного напряжения U_0 подключены последовательно котушка и параллельно соединенные конденсаторы емкостью $2C$ и $5C$. Найдите частоту колебаний заряда на первом конденсаторе.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = \mathrm{e}^{-2t} - 4\cos t$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, \quad t < 0, \\ F_0(\mathrm{e}^{4t/\tau} - 1), \quad 0 < t < \tau, \\ F_0, \quad t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = 2F_0 t_1^4/\tau^4$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = x^5 - 3x^4 + \varepsilon x \mathrm{e}^{-4t}$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого "вязкого" трения на "сухое" (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $5m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 - \varphi^2/2 + \varphi^4/4$, $-\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна 1. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(1 - \mathrm{th}^2(t/\tau))/2$, $t < 0$ и $F(t) = F_0(\mathrm{th}^2(t/\tau) + 1)/2$, $t > 0$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 19

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = 4x + 1/(x-2)^5$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = 2\operatorname{ch} x(\dot{x}^2 - 4)$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. Бусинка, имеющая заряд q и массу m, может скользить без трения вдоль проволочного кольца радиусом R, плоскость которого вертикальна. В нижней точке кольца находится стационарный заряд $4q$. Найдите период малых колебаний бусинки.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = \mathrm{e}^{-5t}\cos 5t$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, \quad t < 0, \\ F_0 t^4/\tau^4, \quad 0 < t < \tau, \\ F_0, \quad t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = F_0 \sin(\pi t_1/2\tau)$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = \mathrm{e}^x - 4x + 2\varepsilon(2t^2 - t^3)x$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого “вязкого” трения на “сухое” (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $4m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 + \varphi^2 - \varphi^3 + \varphi^4/4$, $-\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна 1. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(\operatorname{th}(t/\tau) - 1)/2$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 20

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = \mathrm{e}^x - 3x$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = (x+2)\dot{x}^2/2 - x\mathrm{e}^x$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. К источнику постоянного напряжения U_0 подключены последовательно котушка и конденсаторы емкостью C и $6C$. Найдите частоту колебаний заряда на первом конденсаторе.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = \cos 2t + t^2 \cos t$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, \quad t < 0, \\ F_0 \sin(\pi t/2\tau), \quad 0 < t < \tau, \\ F_0, \quad t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = 4F_0 t_1^2/\tau^2$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = x\varepsilon \cos 5t + 4 \sin x + x$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого “вязкого” трения на “сухое” (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $3m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 - \varphi^2/2 + \varphi^4/4$, $-\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $3/4$. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(1 - \mathrm{th}^2(t/\tau))/2$, $t < 0$ и $F(t) = F_0(\mathrm{th}^2(t/\tau) + 1)/2$, $t > 0$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 21

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = 3\sin 2x - 5x$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = (x-3)^2\dot{x}^2 - x^2/(2x^2+2)$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. Бусинка, имеющая заряд q и массу m, может скользить без трения вдоль горизонтальной спицы. На расстоянии a от этой спицы над ней находится стационарный заряд $-5q$. Найдите период малых колебаний бусинки.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = -2t + 2t^6 + t^7$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, \quad t < 0, \\ F_0(1 - \mathrm{e}^{-3t/\tau}), \quad 0 < t < \tau, \\ F_0, \quad t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = 2F_0 t_1^3/\tau^3$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = x^5 - 3x^2 + 3x + \varepsilon x \mathrm{e}^{-3t}$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого “вязкого” трения на “сухое” (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $2m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 + \varphi^2 - \varphi^3 + \varphi^4/4$, $-\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $5/4$. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(\mathrm{th}(t/\tau) - 1)/2$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 22

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = x^2 + 4x + 3/(x+2)$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = 2\mathrm{e}^{-x}\dot{x}^2 - \mathrm{e}^{x^2+x+4}$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. К источнику постоянного напряжения U_0 подключены последовательно котушка и параллельно соединенные конденсаторы емкостью $3C$ и $C/3$. Найдите частоту колебаний заряда на первом конденсаторе.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = 3t^2 + \sin 4t$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, \quad t < 0, \\ F_0 t^5/\tau^5, \quad 0 < t < \tau, \\ F_0, \quad t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = F_0 \sin(5\pi t_1/2\tau)$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = 3\mathrm{e}^x - x + 3x\varepsilon(t^2 - 3t^3)$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого "вязкого" трения на "сухое" (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $4m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 - \varphi^2/2 + \varphi^4/4, \ -\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна 1. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(1 - \mathrm{th}^2(t/\tau))/2, \ t < 0$ и $F(t) = F_0(\mathrm{th}^2(t/\tau) + 1)/2, \ t > 0$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 23

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = 2x + 3/(x-4)^4$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = \dot{x}^2/(3+x) - 5x\sqrt{6+2x}$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. Бусинка, имеющая заряд q и массу m, может скользить без трения вдоль проволочного кольца радиусом R, плоскость которого вертикальна. В верхней точке кольца находится стационарный заряд $5q$. Найдите период малых колебаний бусинки.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = 3\mathrm{e}^{-5t} + 2t\cos t$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, \quad t < 0, \\ F_0 \sin(5\pi t/2\tau), \quad 0 < t < \tau, \\ F_0, \quad t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = 5F_0 t_1^4/\tau^4$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = 3x\varepsilon \sin 2t + 2\cos x + 5x$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого “вязкого” трения на “сухое” (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $5m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 + \varphi^2 - \varphi^3 + \varphi^4/4$, $-\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна 1. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(\mathrm{th}(t/\tau) - 1)/2$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 24

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = \mathrm{e}^{3x} - 3x$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = \mathrm{e}^{-x^2-5}\dot{x}^2 - 2(\operatorname{ch} x - \cos x)$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. К источнику постоянного напряжения U_0 подключены последовательно котушка и конденсаторы емкостью $2C$ и $7C$. Найдите частоту колебаний заряда на первом конденсаторе.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = 3\mathrm{e}^{-4t}\sin t$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, \quad t < 0, \\ F_0(\mathrm{e}^{-2t/\tau} - 1), \quad 0 < t < \tau, \\ F_0, \quad t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = F_0 t_1^2/2\tau^2$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = x^5 - 3x^2 + 3x + \varepsilon x\mathrm{e}^{-3t}$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого “вязкого” трения на “сухое” (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $6m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 - \varphi^2/2 + \varphi^4/4, \ -\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $3/4$. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(1 - \operatorname{th}^2(t/\tau))/2, \ t < 0$ и $F(t) = F_0(\operatorname{th}^2(t/\tau) + 1)/2, \ t > 0$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.

Домашнее задание №16

Колебания систем с одной степенью свободы

Вариант 25

1. Частица массой $m = 2$ находится в поле $U = 4\sin 2x - 2x$. Найдите положение равновесия частицы, а также период малых колебаний вблизи него. Получите поправки к этим величинам, вызванные малой добавкой $\delta U = \alpha x^2$ к потенциальной энергии.

2. Функция Лагранжа системы с одной степенью свободы имеет вид $L = \operatorname{ch} x(5\dot{x}^2 - 1)$. Найдите частоту малых колебаний системы.

3. Бусинка, имеющая заряд q и массу m, может скользить без трения вдоль горизонтальной спицы. На расстоянии a от этой спицы над ней находится стационарный заряд $-6q$. Найдите период малых колебаний бусинки.

4. На осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует внешняя сила $F(t) = 4\cos 3t - t\sin 2t$. В начальный момент времени $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите вынужденные колебания осциллятора.

5. На покоящийся изначально осциллятор, масса которого $m = 2$, а собственная частота ω_0, действует сила

$$F(t) = \begin{cases} 0, \quad t < 0, \\ F_0 t^6/\tau^6, \quad 0 < t < \tau, \\ F_0, \quad t > \tau. \end{cases}$$

Найдите зависимость координаты осциллятора от времени. Чему равна амплитуда установившихся колебаний? Чему равна работа силы $F(t)$?

6. Осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) движется под действием периодической силы $F(t) = F_0 \sin(\pi t_1/2\tau)$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите установившиеся колебания осциллятора. Как при этом изменяется со временем его энергия?

7. На частицу, масса которой $m = 2$, находящуюся в поле $U(x,t) = 2\mathrm{e}^x - x + 2\varepsilon x(t^4 - t^3)$, $\varepsilon \ll 1$, действует сила трения $F_f = -2\alpha\dot{x}$. В начальный момент $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$. Найдите малые колебания частицы. Что изменится при замене такого “вязкого” трения на “сухое” (сила трения постоянна по величине и направлена противоположно скорости)?

8. Внешнее воздействие на систему может не сводиться к действию потенциальных сил или сил трения. Рассмотрим пример такого воздействия. На гладкой горизонтальной поверхности находится ящик с песком, совершающий малые колебания под действием силы со стороны горизонтальной пружины жесткостью k, которой он прикреплен к неподвижной стене. При движении на ящик действует сила сопротивления $F_f = -\gamma m\dot{x}$, где m – масса ящика. В некоторый момент времени, когда амплитуда колебаний ящика равна A_0, песок начинает высыпаться из ящика через маленькое отверстие в боковой стенке ящика, причем масса песка, высыпающегося за единицу времени, равна $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -m_0/\tau \ \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Начальная масса ящика равна $7m_0$. Получите уравнение движения ящика и проинтегрируйте его при различных соотношениях параметров $\sqrt{m_0/k}$, τ и $1/\gamma$. Как изменится решение, если засыпать песок в ящик из неподвижного резервуара?

9. Бусинка массой m может двигаться без трения вдоль проволоки, изогнутой в горизонтальной плоскости согласно $r(\varphi) = 1 + \varphi^2 - \varphi^3 + \varphi^4/4$, $-\pi < \varphi < \pi$ (где r, φ – полярные координаты в плоскости проволоки). Бусинка прикреплена к пружине жесткостью k, другой конец которой закреплен в начале координат. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна $5/4$. Найдите малые колебания бусинки.

10. На осциллятор (масса m, собственная частота ω_0) действует сила, возрастающая со временем по закону $F(t) = F_0(\operatorname{th}(t/\tau) - 1)/2$. Начальная энергия осциллятора (при $t \to -\infty$) равна E_0. Найдите приобретенную им под действием силы $F(t)$ энергию.